# ЗАПИСКИ

# ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

## ТОМЪ ТРЕТІЙ.

СЪ ПЯТЬЮ РИСУНКАМИ, ПОРТРЕТОМЪ І. Х. ГАЙЕЯ И СНИМКОМЪ СЪ ХРИСОВУЛА СТЕФАНА УРОША КОРОЛЯ СЕРБСКАГО 1303 г.

С.
САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1863.

ПРОДАЕТСЯ У КОММИССІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

А. Базунова, въ С. П. Б.
Н. Глазунова, въ С. П. Б.
Эггерса и Комп., въ С. П. Б.
К. Базунова, въ Москвѣ.
Экспедиція о Комп., въ Тифлисѣ.

L Soc 3983.17
~~Slav 20.3~~

JAN 23 1884

Haynardfund.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ. С.-Петербургъ, 15 іюля 1863 года.

Непремѣнный Секретарь Академикъ *К. Веселовскій.*

ВЪ ТИПОГРАФІИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

# ОГЛАВЛЕНІЕ ТРЕТЬЯГО ТОМА.


| | Стран. |
|---|---|
| Очеркъ жизни и ученой дѣятельности Михаила Васильевича Остроградскаго. Академика Сомова . . . . . | 1 — 29 |
| Отчетъ Императорской Академіи Наукъ по Отдѣленію Русскаго Языка и Словесности, за 1862 годъ. Читанъ Ординарнымъ Академикомъ А. В. Никитенко . . . . . | 30 — 38 |
| Библіографическая записка объ одѣ «Богъ». Акад. Я. Грота. | 39 — 45 |
| О предполагаемомъ центрѣ вулканической дѣятельности въ Хорасанѣ, на основаніи сравнительнаго химическаго изслѣдованія одного персидскаго шлака А. Гёбеля. . . . . | 46 — 55 |
| По вопросу о томъ, въ какой мѣрѣ можно сдѣлать музеи Академіи болѣе доступными. . . . . | 56 — 75 |
| Описаніе нѣсколькихъ монетъ, привезенныхъ изъ Бухары, В. В. Вельяминова-Зернова . . . . . | 76 — 86 |
| Отчетъ по Физико-Математическому и Историко-Филологическому Отдѣленіямъ Императорской Академіи Наукъ за 1862 годъ, читанный въ публичномъ засѣданіи 29 декабря, Непремѣннымъ Секретаремъ Академикомъ К. С. Веселовскимъ . . . . . | 139 — 182 |
| Приложенія къ отчету за 1862 годъ: | |
| I. Списокъ изданій Императорской Академіи Наукъ, вышедшихъ въ свѣтъ съ 1 января по 31 декабря 1862 г. | 183 — 186 |
| II. Списокъ изданій Императорской Академіи Наукъ, печатавшихся съ 1-го января по 31-е декабря 1862 года, но еще не выпущенныхъ въ свѣтъ . . . . . | 187 — 188 |
| III. Краткая записка о жизни и трудахъ І. Х. Гамеля. . . . . | 189 — 196 |
| Списокъ сочиненій, напечатанныхъ Гамелемъ въ изданіяхъ Академіи Наукъ . . . . . | 197 — 198 |
| IV. Личный составъ Императорской Академіи Наукъ, 1 мая 1863 года . . . . . | 199 — 213 |
| Отчетъ о тридцать второмъ присужденіи Демидовскихъ наградъ, читанный въ публичномъ засѣданіи Академіи, 5-го іюня 1862 г., Непремѣннымъ Секретаремъ Академикомъ Веселовскимъ . . . . . | 214 — 235 |
| Рѣшеніе вопроса изъ Діоптрики: найдти поверхность среды, преломляющей и собирающей въ одну точку лучи свѣта, | |

исходящіе нормально изъ точекъ данной поверхности. Стран.
Кандидата Бесселя. . . . . 236—248
О новомъ анемометрѣ. Статья Акад. Э. Х. Ленца, читанная
24 апрѣля 1863 года. . . . . 249—257
Библіографическая замѣтка о похвальномъ словѣ Петру III,
Симона Тодорскаго. П. Б. . . . . 258—264
Дарственный Хрисовулъ Сербскаго короля Стефана Уроша,
отъ 15 марта 1313 года. К. Петковича. . . . . 265—266
Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій Академіи въ декабрѣ
1862 г., январѣ и февралѣ, мартѣ, апрѣлѣ и маѣ 1863 г.:
Торжественное собраніе . . . . . 87— 88
Засѣданія Общаго Собранія . . . . . 88— 90, 267—268
Отдѣленіе Физико-Математическое. . . . . 90—109, 268—281
Отдѣленіе Русскаго Языка и Словесности 110—114, 281—286
Отдѣленіе Историко-Филологическое . . . . 114—118, 286—289

Приложенія къ протоколамъ:

1. Предложеніе Акад. Абиха . . . . . 118—125
2. Образчикъ филологическаго разбора языка новѣйшихъ писателей. Акад. П. С. Билярскаго. . . . . 125—137

Библіографическія извѣстія:

Реперторіумъ фонъ-Берга по минералогіи, геологіи, палеонтологіи, по горному и заводскому дѣлу въ Россіи до конца XVIII столѣтія. . . . . 137—138
О 4-мъ томѣ Исторіи Царствованія Петра Великаго. . . . . 290—293

Приложенія къ Запискамъ Императ. Академіи Наукъ:

№ 1. Аполлонъ Боэдроміосъ. Статуя музея графа С. Г. Строгонова, объясненная Акад. Л. Стефани. . . 1— 73
№ 2. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала

$$\frac{x+C_1}{x+C_2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

и другихъ выраженій подобнаго рода, Акад. В. Буняковскаго. . . . . 1— 32
№ 3. О вентиляціи въ нашемъ климатѣ. Акад. Э. Ленца 1— 39
№ 4. Матеріалы для исторіи Пугачевскаго бунта: переписка Императрицы Екатерины II съ графомъ П. И. Панинымъ. Акад. Я. К. Грота . . . . . 1— 37
Отрывки изъ изслѣдованій о Варяжскомъ вопросѣ (продолженіе). С. Гедеонова. . . . . 241—~~353~~ 274
№ 5. Записки о южномъ берегѣ Каспійскаго моря. Г. Мельгунова . . . . . I—XXXII, 1—373
№ 6. Матеріалы для исторіи журнальной и литературной дѣятельности Екатерины II. П. Пекарскаго . . 1— 90

О НѢКОТОРЫХЪ

# ЧАСТНЫХЪ СЛУЧАЯХЪ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

## ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ ДИФФЕРЕНЦІАЛА

$$\frac{x+C_1}{x+C_2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

## И ДРУГИХЪ ВЫРАЖЕНІЙ ПОДОБНАГО ВИДА.

Ак. В. Буняковскаго.

---

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ IIIму ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ

№ 2.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1863.

ПРОДАЕТСЯ У КОММИССІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

А. Базунова, въ С. П. Б.
Эггерса и Комп., въ С. П. Б.
Н. Глазунова, въ С. П. Б.
И. Базунова, въ Москвѣ.
Эфіянджянца и Комп., въ Тифлисѣ

*Цѣна 25 коп. сер.*

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ. С.-Петербургъ,
21 Марта 1863 года.

Непремѣнный Секретарь Академикъ *К. Веселовскій.*

ВЪ ТИПОГРАФІИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ

# О НѢКОТОРЫХЪ ЧАСТНЫХЪ СЛУЧАЯХЪ

# ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ ДИФФЕРЕНЦІАЛА

$$\frac{x+C_1}{x+C_2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

## И ДРУГИХЪ ВЫРАЖЕНІЙ ПОДОБНАГО ВИДА.

Акад. В. Буняковскаго.

---

Въ этой запискѣ мы намѣрены разсмотрѣть нѣкоторые частные случаи, въ которыхъ интегралъ

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}},$$

преимущественно въ предположеніи, что раціональная дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ имѣетъ видъ $\frac{x+C_1}{x+C_2}$, выражается помощію функцій алгебрическихъ и логариѳмическихъ, какъ вещественныхъ, такъ и мнимыхъ. Употребляемый нами пріёмъ преобразованія такъ простъ, что изложеніе его могло бы войти въ элементарные курсы Интегральнаго исчисленія.

1. Условимся предварительно въ нѣкоторыхъ понятіяхъ и наименованіяхъ съ цѣлію упростить и сократить дальнѣйшее изложеніе. И во первыхъ назовемъ *возвратною* такую функцію, которая удовлетворяетъ требованію

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

а *знакоперемѣнною возвратною*, функцію, опредѣляемую условіемъ

$$\psi(x) = -\psi\left(\frac{1}{x}\right) \text{ или } \psi(x) + \psi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \ldots\ldots (2)$$

Простѣйшая функція перваго вида очевидно будетъ $x + \frac{1}{x}$, а втораго, $x - \frac{1}{x}$.

Замѣтимъ также, что вмѣсто характеристическихъ условій (1) и (2) можно принять и слѣдующія:

$$\varphi(x) = \mathrm{f}\left(x + \frac{1}{x}\right),\ \psi(x) = \mathrm{f}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

разумѣя подъ f какую угодно функцію.

Во всемъ послѣдующемъ намъ придется разсматривать только *раціональныя* функціи этихъ двухъ видовъ; поэтому, для сокращенія рѣчи, мы назовемъ *возвратнымъ полиномомъ* выраженіе

$$\varphi(x) = A_0\left(x + \frac{1}{x}\right)^m + A_1\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_m$$

или, равнозначащее съ нимъ,

$$\varphi(x) = a_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m,$$

оба не мѣняющія ни величины своей, ни знака, съ перемѣною $x$ на $\frac{1}{x}$, а *знакоперемѣннымъ возвратнымъ полиномомъ*, выраженіе

$$\psi(x) = B_1\left(x^n - \frac{1}{x_n}\right) + B_2\left(x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + B_{n-1}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + B_n\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

сохраняющее также численную величину свою, но перемѣняющее знакъ съ измѣненіемъ $x$ на $\frac{1}{x}$. Первой изъ этихъ двухъ функцій мы присвоимъ характеристику $\varphi$, а второй характеристику $\psi$, съ различными указателями.

Общій видъ *возвратной раціональной дроби* будетъ

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{a_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m}{b_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + b_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + b_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + b_n},$$

которая, въ случаѣ несократимости, приводится къ обыкновенной раціональной дроби, имѣющей числителемъ полиномъ степени $m + n$, а знаменателемъ, степени $2n$, когда $n > m$; если же $n < m$, то степень числителя будетъ $2m$, а знаменателя $n + m$; при $n = m$, оба члена дроби будутъ степени $2n = 2m$.

Изъ уравненій (1) и (2) непосредственно вытекаютъ слѣдующія свойства разсматриваемыхъ двухъ родовъ функцій $\varphi$ и $\psi$:

1) *Результатъ алгебрической суммы, а равно произведенія и частнаго сколькихъ угодно возвратныхъ функцій, самъ будетъ всегда функціею возвратною.* И такъ

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_3(x) = \varphi(x)$$

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x) \ldots = \varphi(x)$$

$$\frac{\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x) \cdot \ldots}{\varphi_{(1)}(x) \cdot \varphi_{(2)}(x) \cdot \varphi_{(3)}(x) \ldots} = \varphi(x).$$

2) *Алгебрическая сумма сколькихъ угодно знакоперемѣнныхъ возвратныхъ функцій будетъ сама функціею такого же рода.* И такъ

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) - \psi_3(x) = \psi(x).$$

3) *Отношеніе произведенія нѣсколькихъ знакоперемѣнныхъ возвратныхъ функцій къ другому, подобному же произведенію, равно или знакоперемѣнной возвратной функціи, или просто возвратной, смотря по тому, будетъ-ли число всѣхъ множителей, входящихъ въ составъ числителя и знаменателя разсматриваемой дроби,* нечётнымъ *или* чётнымъ. И такъ

$$\frac{\psi_1(x) \cdot \psi_2(x) \ldots \psi_m(x)}{\psi_{(1)}(x) \cdot \psi_{(2)}(x) \ldots \psi_{(n)}(x)} = \begin{cases} \psi(x) \text{ когда } m + n = \text{нечётн. числу,} \\ \varphi(x) \text{ когда } m + n = \text{чётн. числу.} \end{cases}$$

4) *Когда числитель и знаменатель данной дроби состоятъ изъ произведенія нѣсколькихъ функцій обоего рода* $\varphi$ *и* $\psi$, *то отношеніе будетъ знакоперемѣнною возвратною функціею когда число множителей вида* $\psi$ нечётное, *а возвратною, когда это число* чётное. *Тѣ же самое должно разумѣть и о произведеніи нѣсколькихъ функцій обоихъ родовъ.* И такъ

$$\frac{\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\ldots\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ldots\ldots\psi_m(x)}{\varphi_{(1)}(x)\,\varphi_{(2)}(x)\ldots\psi_{(1)}(x)\,\psi_{(2)}(x)\ldots\psi_{(n)}(x)} = \begin{cases} \psi(x) \text{ когда } m+n = \text{нечётн. числу,} \\ \varphi(x) \text{ когда } m+n = \text{чётн. числу,} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ldots\psi_m(x) = \begin{cases} \psi(x) \text{ когда } m = \text{нечётн. числу,} \\ \varphi(x) \text{ когда } m = \text{чётн. числу.} \end{cases}$$

5) *Съ обращеніемъ дроби, относящейся къ одному изъ двухъ видовъ функцій* $\varphi$ *и* $\psi$, *свойство новой дроби не перемѣнится.* И такъ

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \text{ и } \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \text{ а равно } \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)} \text{ и } \frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}$$

будутъ функціями *возвратными*, а

$$\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)} \text{ и } \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

*знакоперемѣнными возвратными.*

2. Заключимъ эти предварительныя понятія слѣдующимъ предложеніемъ:

*Всякая обыкновенная раціональная дробь*

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

*можетъ быть разложена на сумму двухъ дробей*

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} + \frac{\varphi_3(x)\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\varphi_4(x)},$$

*изъ которыхъ первая есть* возвратная *функція, а вторая,* знакоперемѣнная возвратная.

Чтобы показать справедливость этого предложенія, и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить составъ дробей

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)},$$

положимъ

$$x + \frac{1}{x} = z;$$

рѣшая это уравненіе въ отношеніи къ $x$, найдется

$$x = \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4}.$$

Замѣтимъ, что по причинѣ

$$\sqrt{z^2 - 4} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4} = x - \frac{1}{x},$$

вторая часть предъидущей формулы обратится въ $x$, или въ $\frac{1}{x}$, смотря по тому, какой знакъ допустимъ передъ радикаломъ. Если удержимъ передъ нимъ знакъ $+$, то получимъ

$$x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R},$$

полагая для сокращенія

$$z^2 - 4 = R = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2;$$

отрицательный знакъ передъ радикаломъ доставитъ

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{R}.$$

Подставляя предъидущую величину $x$ въ данную раціональную дробь, найдемъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}{F\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R}\right)} = \frac{M + N\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}}$$

$$= \frac{MP - NQR}{P^2 - RQ^2} + \frac{NP - MQ}{P^2 - RQ^2}\sqrt{R}, \ldots\ldots (3)$$

гдѣ $M$, $N$, $P$ и $Q$ означаютъ извѣстныя цѣлыя функціи перемѣнной $z$, которыя, въ отношеніи къ $x$, очевидно будутъ всѣ *возвратныя* функціи; то же самое должно разумѣть объ $R$ и о различныхъ цѣлыхъ его степеняхъ. Слѣдовательно и отношенія

$$\frac{MP - NQR}{P^2 - RQ^2} \quad \text{и} \quad \frac{NP - MQ}{P^2 - RQ^2},$$

согласно съ нашимъ утвержденіемъ, будутъ *возвратными* дробями, а выраженіе

$$\frac{NP - MQ}{P^2 - RQ^2}\sqrt{R}$$

*знакоперемѣнною возвратною* дробью.

Легко видѣть, что количества $M$, $N$, $P$ и $Q$ опредѣляются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{f\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R}\right) + f\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}{2} \\ N &= \frac{f\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R}\right) - f\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}{2\sqrt{R}} \\ P &= \frac{F\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R}\right) + F\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}{2} \\ Q &= \frac{F\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{R}\right) - F\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}{2\sqrt{R}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

3. Покажемъ теперь, что въ общемъ выраженіи

$$Xdx = \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

подкоренной величинѣ

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

всегда можно дать видъ

$$z^4 + Az^3 + Bz^2 + Az + 1 = z^2\left[z^2 + \frac{1}{z^2} + A\left(z + \frac{1}{z}\right) + B\right];$$

для сокращенія рѣчи мы назовемъ такой видъ *возвратнымъ*, откидывая мысленно множитель $z^2$. Линейное преобразованіе

$$x = \frac{z}{\beta} + \alpha$$

прямо приведетъ насъ къ предполагаемой цѣли. Дѣйствительно, такъ какъ

$$\beta^4(x^4+ax^3+bx^2+cx+d)=$$
$$z^4+(4\alpha+a)\beta.z^3+(6\alpha^2+3a\alpha+b)\beta^2.z^2$$
$$+(4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c)\beta^3.z+(\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)\beta^4,$$

то, для обращенія этого полинома въ *возвратный*, стоитъ только принять

$$(\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)\beta^4=1$$

и
$$(4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c)\beta^2=4\alpha+a.$$

Исключеніе величины $\beta$ доставитъ, для опредѣленія $\alpha$, слѣдующее уравненіе 3-ей степени:

$$(4ab-8c-a^3)\alpha^3+(4b^2-16d-2ac-a^2b)\alpha^2$$
$$+(4bc-8ad-a^2c)\alpha+c^2-a^2d=0, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

а $\beta$ опредѣлится чрезъ $\alpha$ формулою

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\pm\sqrt{\frac{4\alpha+a}{4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c}},\\ \text{или}\quad \beta&=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}}.\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

Изъ трехъ корней уравненія (5) одинъ, по крайней мѣрѣ, будетъ вещественный. Каждому корню $\alpha$ будутъ соотвѣтствовать вообще четыре величины для $\beta$, по-двѣ равныя между собой, но съ противными знаками. Означивъ чрезъ $\alpha$ и $\beta$ которую ни есть изъ полученныхъ такимъ образомъ двѣнадцати системъ, найдется

$$Xdx=\frac{\beta f\left(\frac{z}{\beta}+\alpha\right)}{F\left(\frac{z}{\beta}+\alpha\right)}\cdot\frac{dz}{z\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}+A\left(z+\frac{1}{z}\right)+B}},$$

гдѣ

$$A=4\alpha+a, \quad B=(6\alpha^2+3a\alpha+b)\beta^2.$$

Замѣтимъ, что дробь

$$\frac{\beta f\left(\frac{z}{\beta}+\alpha\right)}{F\left(\frac{z}{\beta}+\alpha\right)}$$

отличается отъ первоначальной

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

только численными величинами коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ перемѣнной; что же касается до степеней ея числителя и знаменателя, то онѣ не измѣнились; поэтому, удержавъ для простоты прежнее обозначеніе и прежнюю перемѣнную $x$, и предположивъ, что подкоренной полиномъ уже преобразованъ въ *возвратный*, мы можемъ представить предложенный дифференціалъ въ видѣ

$$Xdx = \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Ax+1}}$$

$$= \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+A\left(x+\frac{1}{x}\right)+B}},$$

въ которомъ и будемъ разсматривать его въ дальнѣйшемъ изложеніи.

4. Пусть будетъ

$$x+\frac{1}{x}=z;$$

получится

$$x^2+\frac{1}{x^2}+A\left(x+\frac{1}{x}\right)+B=z^2+Az+B-2,$$

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dz,\ \frac{dx}{x}=\frac{dz}{x-\frac{1}{x}}=\frac{dz}{\sqrt{z^2-4}}=\frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Подставляя эти величины въ предъидущее выраженіе для $Xdx$, и разлагая дробь

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}{F\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{R}\right)}$$

на основаніи формулъ (3) и (4), будетъ

$$\int X dx = \int \frac{MP - NQR}{P^2 - RQ^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}\sqrt{x^2 + Ax + B - 2}} + \int \frac{NP - MQ}{P^2 - RQ^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + Ax + B - 2}}. \quad (7)$$

Послѣдній интегралъ очевидно выразимъ посредствомъ алгебрическихъ и логариѳмическихъ функцій, вещественныхъ или мнимыхъ. Слѣдовательно, если

$$MP - NQR = 0,$$

то получится и интеграль $\int X dx$. Разсмотримъ сперва слѣдствія, вытекающія изъ этого предположенія. Замѣнивъ въ послѣднемъ равенствѣ $M$, $N$, $P$, $Q$ и $R = x^2 - 4$ равными имъ величинами, опредѣляемыми формулами (4), найдемъ

$$f\left(\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\right) F\left(\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\right) F\left(\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\right) = 0$$

или

$$f(x) F\left(\tfrac{1}{x}\right) + f\left(\tfrac{1}{x}\right) F(x) = 0.$$

И такъ, если это выраженіе тождественно обращается въ нуль, то интегралъ $\int X dx$ опредѣлится точнымъ образомъ. Изъ послѣдняго равенства, которое напишемъ въ слѣдующемъ простѣйшемъ видѣ

$$\frac{f(x)}{F(x)} + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

выводятся условія интегрируемости дифференціала $X dx$ въ разсматриваемомъ теперь случаѣ.

Условія эти очевидно приводятся къ тому, чтобы дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ была *знакоперемѣнною возвратною*, какъ это прямо слѣдуетъ изъ тождества уравненій (3) и (8).

Начнемъ приложенія съ простѣйшаго вида дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, и положимъ сперва

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x + b}{a'x + b'};$$

мы удерживаемъ въ знаменателѣ коэффиціентъ передъ $x$ для того чтобы не упустить изъ виду и предположенія $a' = 0$, не предрѣшая ничего о возможности или невозможности такого случая.

Условіе (8) доставитъ

$$\frac{x+b}{a'x+b'} + \frac{\frac{1}{x}+b}{\frac{a'}{x}+b'} = \frac{(b'+a'b)x^2+2(a'+bb')x+b'+a'b}{(a'x+b')(b'x+a')} = 0,$$

откуда

$$b'+a'b=0 \quad \text{и} \quad a'+bb'=0.$$

Исключеніе величины $a'$ изъ этихъ двухъ уравненій приведетъ къ равенству

$$b'(b^2-1)=0.$$

Такъ какъ $b'$ нельзя положить равнымъ нулю, потому что въ такомъ предположеніи уничтожится также коэффиціентъ $a'$, а слѣдовательно и знаменатель $a'x+b'$, то получимъ только два возможныя рѣшенія, именно

$$b=\pm 1, \quad b'=\mp a',$$

которымъ соотвѣтствуютъ дроби

$$\frac{x+b}{a'x+b'} = \frac{1}{a'}\cdot\frac{x\pm 1}{x\mp 1},$$

или, откинувъ постоянный множитель $\frac{1}{a'}$, *двѣ* слѣдующія:

$$\frac{x+1}{x-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{x+1}.$$

Обѣ эти дроби, какъ и должно быть, принадлежатъ къ числу *знакоперемѣнныхъ возвратныхъ*; и дѣйствительно

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2},$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)+2}.$$

И такъ, оба интеграла

$$\int \frac{x \pm 1}{x \mp 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1}}$$

выразимы посредствомъ алгебрическихъ и логариѳмическихъ функцій.

Можно замѣтить мимоходомъ, что положивъ $\frac{x \pm 1}{x \mp 1} = z$ въ послѣдней формулѣ, получимъ преобразованный дифференціалъ, который также прямо интегрируется въ конечномъ видѣ.

Положимъ теперь, что подъинтегральная дробь будетъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Въ силу условія (8) найдемъ

$$\frac{x^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} + \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{b}{x} + c}{\frac{a'}{x^2} + \frac{b'}{x} + c'} = 0;$$

по приведеніи этихъ двухъ дробей къ общему знаменателю окажется, что числитель обратится тождественно въ нуль при условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} c' + a'c &= 0 \\ b' + bc' + cb' + a'b &= 0 \\ a' + bb' + cc' &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(9)$$

Внося $c' = -a'c$ во второе и третье уравненія, получимъ слѣдующія два:

$$(c+1)b' = a'b(c-1) \text{ и } a'(c^2-1) = bb',$$

почленное перемноженіе которыхъ доставитъ

$$(c-1)a'b'(c+1)^2 = (c-1)a'b'b^2 \ldots\ldots\ldots(10)$$

Разберемъ подробно всѣ представляющіеся здѣсь случаи. Для этого, удобнѣе всего будетъ разсмотрѣть предположенія, при которыхъ удовлетворяется равенство (10), удерживая при

томъ только случаи, совмѣстныя съ другими условными уравненіями.

1.) $c = 1$; тогда $b' = 0$, $c' = -a'$, а $b$ остается произвольнымъ. Слѣдовательно получится дробь

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{1}{a'}\cdot\frac{x^2+bx+1}{x^2-1}$$
$$= \frac{1}{a'}\cdot\frac{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+b\right]\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}.$$

2.) $a' = 0$; тогда $c' = 0$; такъ какъ $b'$ не можетъ равняться нулю, то $c = -1$, и поэтому $b = 0$. Такимъ образомъ найдется дробь

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{x^2-1}{b'x} = \frac{1}{b'}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

3.) $b' = 0$; такъ какъ нельзя положить $a' = 0$, потому что въ этомъ случаѣ получили бы и $c' = 0$, то уравненія

$$(c+1)b' = a'b(c-1) \quad \text{и} \quad a'(c^2-1) = bb'$$

обратятся въ слѣдующія:

$$b(c-1) = 0 \quad \text{и} \quad (c+1)(c-1) = 0.$$

Оба удовлетворяются значеніемъ $c = 1$ и $b$ произвольнымъ. И такъ, $b' = 0$, $c = 1$, $c' = -a'$ и $b$ равно произвольной величинѣ, что̀ приводитъ къ дроби

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{1}{a'}\cdot\frac{x^2+bx+1}{x^2-1},$$

уже полученной въ 1-омъ случаѣ.

Если примемъ $c = -1$, то должно быть $b = 0$; и такъ, получаемъ слѣдующую систему: $b' = 0$, $c = -1$, $c' = a'$ и $b = 0$. Дробь, соотвѣтствующая этимъ значеніямъ, будетъ

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{x^2-1}{a'(x^2+1)} = \frac{1}{a'}\cdot\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}.$$

4.) Наконецъ, раздѣливъ уравненіе (10) на произведеніе $(c-1)a'b'$, которое, послѣ разсмотрѣнныхъ трехъ случаевъ, можно положить отличнымъ отъ нуля, получимъ

$$(c+1)^2 = b^2, \quad \text{откуда} \quad c = \pm b - 1.$$

Подставленіе этой величины въ уравненія (9) доставитъ

$$c' \pm a'b - a' = 0$$
$$b' + bc' + b'(\pm b - 1) + a'b = b(c' \pm b' + a') = 0$$
$$a' + bb' + c'(\pm b - 1) = 0.$$

Второму уравненію удовлетворяемъ двоякимъ образомъ, или положивъ $b = 0$, или $c' \pm b' + a' = 0$; если примемъ $b = 0$, то будетъ $c = -1$, $c' = a'$, а $b'$ останется произвольнымъ. Слѣдовательно получимъ видъ

$$\frac{x^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{x^2 - 1}{a'\left(x^2 + \frac{b'}{a'}x + 1\right)}$$
$$= \frac{1}{a'} \cdot \frac{x - \frac{1}{x}}{\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{b'}{a'}},$$

который, при $b' = 0$, упрощается, и даетъ:

$$\frac{1}{a'} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{a'} \cdot \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}.$$

Второе предположеніе $c' \pm b' + a' = 0$ приведетъ къ слѣдующимъ заключеніямъ: подставляя значеніе $c = \pm b - 1 = \pm(b \mp 1)$ въ первое изъ уравненій (9), получимъ

$$c' = -a'c = -a'(\pm b - 1) = \mp ba' + a' = \mp(b \mp 1)a';$$

написавъ же второе изъ уравненій (9) въ видѣ

$$b'(1 + c) + b(c' + a') = 0,$$

и замѣнивъ въ немъ равныя величины равными, найдется

$$\pm bb' + b(2a' \mp ba') = 0,$$

откуда, раздѣляя на $b$, которое по предположенію не обращается въ нуль,

$$b' = a'(b \mp 2).$$

И такъ, разсматриваемая нами дробь представится окончательно въ видѣ

$$\frac{x^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{1}{a'} \cdot \frac{x^2 + bx \pm (b \mp 1)}{x^2 + (b \mp 2)x \mp (b \mp 1)}.$$

Но легко видѣть, что это отношеніе, по раздѣленіи обоихъ его членовъ на общій дѣлитель, сводится на видъ найденный уже выше для дроби съ линейными числителемъ и знаменателемъ. И дѣйствительно

$$\frac{x^2 + bx \pm (b \mp 1)}{x^2 + (b \mp 2)x \mp (b \mp 1)} = \frac{(x \pm 1)(x + b \mp 1)}{(x \mp 1)(x + b \mp 1)} = \frac{x \pm 1}{x \mp 1}.$$

Соображеніе четырехъ разсмотрѣнныхъ сей-часъ случаевъ и того свойства, по которому дробь можетъ быть обращена (N° 1), приводитъ къ заключенію, что интегралъ $\int X dx$ выразимъ помощію алгебрическихъ и логариѳмическихъ функцій, когда дробь

$$\frac{x^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

предполагаемая несократимою, будетъ одного изъ слѣдующихъ *четырехъ* видовъ:

$$\frac{x^2 + bx + 1}{x^2 - 1} = \frac{\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) + b\right]\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4},$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + bx + 1} = \frac{x - \frac{1}{x}}{\left(x + \frac{1}{x}\right) + b},$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x},$$

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x - \frac{1}{x}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4},$$

разумѣя подъ $b$ произвольное число, включая сюда и *нуль*. Всѣ эти дроби, очевидно, принадлежатъ къ виду *знакоперемѣнныхъ возвратныхъ*.

Мы не будемъ останавливаться на подобномъ разборѣ тѣхъ случаевъ, когда степени числителя и знаменателя подъинтегральной раціональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ превышаютъ вторую, а замѣтимъ только, что основываясь на свойствахъ *возвратныхъ* и *знакоперемѣнныхъ возвратныхъ функцій* относительно ихъ суммы, разности, произведенія и частнаго (N° 1), и употребляя найденные уже виды, можно получить нѣкоторые другіе, при которыхъ интегралъ $\int X dx$ опредѣлится посредствомъ функцій алгебрическихъ и логариѳмическихъ. Вотъ тому нѣсколько примѣровъ:

$$\frac{x^2-1}{x}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{x^3-1}{x(x+1)},$$

$$\frac{x^2-1}{x}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^3+1}{x(x-1)},$$

$$\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x-\frac{1}{x}}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right]},$$

$$\frac{1}{b+b'}\left[\frac{x^2+bx+1}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x^2+b'x+1}\right]=\frac{x^3+Cx^2+x}{(x^2-1)(x^2+b'x+1)},$$

гдѣ $C=\frac{bb'+4}{b+b'}$ и $b'$ изображаютъ произвольныя постоянныя величины.

5. Для поясненія изложеннаго въ предъидущемъ N° 4 пріёма, возьмемъ дифференціалъ

$$X dx=\frac{x-1}{x+3}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+8x^3-2x^2-8x+17}},$$

и посмотримъ, можетъ-ли онъ быть приведенъ къ виду, удовлетворяющему условіямъ интегрируемости выраженія $X dx$ въ

конечномъ видѣ. Для обращенія подрадикальной величины въ *возвратный полиномъ*, полагаемъ

$$x = \frac{s}{\beta} + \alpha,$$

и, по формулѣ (5), находимъ

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0.$$

Изъ трехъ корней этого уравненія одинъ только, $\alpha = -1$, будетъ вещественный, который и удерживаемъ; далѣе, въ силу формулъ (●), имѣемъ $\beta = \pm\frac{1}{2}$; принявъ положительный знакъ, получимъ

$$x = 2z - 1.$$

Внося эту величину въ подкоренное выраженіе, будетъ

$$x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 8x + 17$$
$$= 16(z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 2z + 1).$$

Сверхъ того, такъ какъ

$$dx = 2dz, \quad \frac{x-1}{x+3} = \frac{z-1}{z+1},$$

то и получится

$$\int X dx = \frac{1}{2}\int \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 5}}.$$

Но мы знаемъ, что дробь

$$\frac{z-1}{z+1}$$

есть *знакоперемѣнная возвратная*; изъ этого прямо заключаемъ, что предложенный интегралъ выразимъ въ конечномъ видѣ.

Положивъ

$$z + \frac{1}{z} = u,$$

найдется

$$\frac{dz}{z} = \frac{du}{z - \frac{1}{z}},$$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{z-\frac{1}{z}}{\left(z+\frac{1}{z}\right)+2} = \frac{z-\frac{1}{z}}{u+2},$$

и окончательно

$$\int X dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+2)\sqrt{u^2+2u-7}}.$$

Опредѣливъ этотъ интегралъ по обыкновеннымъ правиламъ, получимъ, послѣ всѣхъ подстановленій,

$$\int \frac{x-1}{x+3}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+8x^3-2x^2-8x+17}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot \text{arctang.}\left\{\frac{\sqrt{x^4+8x^3-2x^2-8x+17}-(x+3)^2}{2\sqrt{7}\,(x+1)}\right\} + C.$$

6. Обратимся теперь къ тому случаю, когда раціональная дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ въ приготовленномъ дифференціалѣ

$$X dx = \frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Ax+1}}$$

не будетъ *знакоперемѣнною возвратною*. Въ такомъ предположеніи первый изъ двухъ интеграловъ второй части формулы (Э) не исчезнетъ. Не смотря однакожъ на то, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ мы сей-часъ увидимъ, можно будетъ опредѣлить интегралъ $\int X dx$ руководствуясь соображеніями и пріёмами, подобными вышеизложеннымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ въ формулѣ (Э) неисчезающій интегралъ

$$Y = \int \frac{MP-NQR}{P^2-RQ^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{R}\,.\sqrt{z^2+Az+B-2}};$$

такъ какъ $\sqrt{R} = \sqrt{z^2-4}$, то замѣнивъ произведеніе двухъ радикаловъ корнемъ изъ произведенія, получимъ

$$Y = \int \frac{MP-NQR}{P^2-RQ^2}\cdot\frac{dz}{\Delta(z)},$$

гдѣ, для краткости, принято

$$\Delta(z) = \sqrt{(z^2-4)(z^2+Az+B-2)}$$

$$= \sqrt{z^4+Az^3+(B-6)z^2-4Az-4(B-2)}.$$

Если теперь, сообразно съ показаннымъ въ N$^0$ 3, обратимъ, посредствомъ линейнаго преобразованія $z = \frac{z'}{\beta'} + \alpha'$, полиномъ

$$z^4 + Az^3 + (B-6)z^2 - 4Az - 4(B-2)$$

въ *возвратный*, то получимъ

$$\Delta(z) = \frac{z'}{\beta'^2}\sqrt{z'^2 + \frac{1}{z'^2} + A'\left(z' + \frac{1}{z'}\right) + B'} = \frac{z'}{\beta'^2}\Delta'(z').$$

Слѣдовательно

$$Y = \beta' \int \frac{M'P' - N'Q'R'}{P'^2 - R'Q'^2} \cdot \frac{dz'}{z'\Delta'(z')},$$

обозначая чрезъ $M'$, $N'$.... величины $M$, $N$.... по замѣненіи въ нихъ перемѣнной $z$ суммою $\frac{z'}{\beta'} + \alpha'$.

Если случится, что новая дробь

$$\frac{M'P' - N'Q'R'}{P'^2 - R'Q'^2} = \frac{f_1(z')}{F_1(z')}$$

*знакоперемѣнная возвратная*, то есть удовлетворяетъ условію

$$\frac{f_1(z')}{F_1(z')} + \frac{f_1\left(\frac{1}{z'}\right)}{F_1\left(\frac{1}{z'}\right)} = 0,$$

то заключимъ, что интегралъ $Y$ возможенъ въ конечномъ видѣ, и опредѣлимъ его точно такъ, какъ показано въ N$^0$ 4, хотя въ настоящемъ случаѣ первоначальная дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ и не будетъ *знакоперемѣнною возвратною*. Если же это условіе не состоится, то разбиваемъ интегралъ $Y$, въ послѣднемъ его видѣ, на сумму $Y' + Z'$ двухъ другихъ интеграловъ, какъ въ N$^0$ 4; второй изъ нихъ $Z'$ найдется въ конечномъ видѣ, а съ первымъ интеграломъ $Y'$ поступаемъ опять точно такъ, какъ объяснено сей-часъ относительно $Y$. Продолжая такимъ образомъ, будемъ послѣдовательно отдѣлять отъ $\int X dx$ интегралы, выразимые въ конечномъ видѣ, и окажется, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ можно дойти до значенія предложеннаго интеграла $\int X dx$.

7. Пояснимъ сказанное примѣромъ; положимъ, что разсматривается интегралъ

$$\int X dx = \int \frac{x+b}{x+b'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{x+b}{x+b'} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}},$$

съ *возвратнымъ* подкореннымъ количествомъ. Изъ предъидущаго мы знаемъ, что интегралъ этотъ получается посредствомъ функцій алгебрическихъ и логариѳмическихъ при двухъ системахъ, именно при $b = +1$, $b' = -1$ и при $b = -1$, $b' = +1$; посмотримъ теперь, не существуютъ-ли, кромѣ того, другія системы значеній для $b$ и $b'$, при которыхъ $\int X dx$ выражается также въ конечномъ видѣ.

Положимъ

$$x + \frac{1}{x} = z;$$

получимъ

$$x = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4},$$

и сверхъ того

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{z^2-4}},$$

$$\frac{x+b}{x+b'} = \frac{z + 2b + \sqrt{z^2-4}}{z + 2b' + \sqrt{z^2-4}} = \frac{(b+b')z + 2(1+bb')}{2b'z + 2(1+b'^2)} + \frac{(b'-b)\sqrt{z^2-4}}{2b'z + 2(1+b'^2)}.$$

Слѣдовательно

$$\int X dx = \int \frac{(b+b')z + 2(1+bb')}{2b'z + 2(1+b'^2)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z^2-4)(z^2-2)}}$$

$$+ \frac{b'-b}{2b'} \int \frac{dz}{\left(z + \frac{1+b'^2}{b'}\right)\sqrt{z^2-2}}.$$

Послѣдній интегралъ, который изобразимъ чрезъ $Z$, опредѣлится по обыкновеннымъ правиламъ; величина его, выраженная чрезъ $x$, будетъ

*

$$Z = \frac{b'-b}{2b'}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1+b'^2}{b'}\right)\sqrt{x^2-2}} =$$

$$\frac{b'-b}{2\sqrt{b'^2+1}}\ \log.\ \left\{\frac{b'(x^2+1-\sqrt{x^4+1})+(b'^2+1+\sqrt{b'^4+1})\,x}{b'(x^2+1-\sqrt{x^4+1})+(b'^2+1-\sqrt{b'^4+1})\,x}\right\} \ldots\ldots (11)$$

Что̀ касается до перваго интеграла

$$Y = \int \frac{(b+b')\,x+2\,(1+bb')}{2b'x+2\,(1+b'^2)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)\,(x^2-2)}},$$

то будемъ поступать съ нимъ какъ объяснено въ предъидущемъ № 6. Сообразно съ сказаннымъ тамъ, надобно обратить полиномъ

$$(z^2-4)\,(z^2-2) = z^4-6z^2+8$$

въ *возвратный*, что̀ достигается чрезъ линейное преобразованіе

$$z = \sqrt[4]{8}\,.\,u,$$

доставляющее

$$dz = \sqrt[4]{8}\,.\,du,$$

$$(z^2-4)\,(z^2-2) = z^4-6z^2+8 =$$

$$8u^4-6\sqrt{8}\,.\,u^2+8 = 8\,(u^4-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,.\,u^2+1),$$

и слѣдовательно

$$Y = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\int \frac{(b+b')\sqrt[4]{8}\,.\,u+2\,(1+bb')}{2b'\sqrt[4]{8}\,.\,u+2\,(1+b'^2)} \cdot \frac{du}{u\sqrt{u^2+\frac{1}{u^2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}}}.$$

Пусть будетъ теперь

$$u+\frac{1}{u} = t;$$

получимъ

$$\frac{du}{u} = \frac{dt}{u-\frac{1}{u}},$$

$$u^2 + \frac{1}{u^2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = t^2 - 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

въ слѣдствіе чего найдется

$$Y = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \cdot \frac{b+b'}{b'} \int \frac{u + \dfrac{2(1+bb')}{(b+b')\sqrt[4]{8}}}{u + \dfrac{1+b'^2}{b'\sqrt[4]{8}}} \cdot \frac{\dfrac{dt}{u - \dfrac{1}{u}}}{\sqrt{t^2 - 2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}}} \quad \ldots\ldots (12)$$

Ясно, что этотъ интегралъ получится въ конечномъ видѣ въ томъ случаѣ, когда дробь, заключающаяся подъ знакомъ $\int$, будетъ *знакоперемѣнною возвратною*. Но мы знаемъ, что такое условіе удовлетворяется при двухъ слѣдующихъ видахъ подъинтегральной раціональной дроби: $\frac{u \pm 1}{u \mp 1}$. И такъ, если дѣйствительно упоминаемая дробь такого вида, то должно быть или

$$2(1 + bb') = (b + b')\sqrt[4]{8} \quad \text{и} \quad 1 + b'^2 = -b'\sqrt[4]{8},$$

или

$$2(1 + bb') = -(b + b')\sqrt[4]{8} \quad \text{и} \quad 1 + b'^2 = b'\sqrt[4]{8}.$$

Вотъ двѣ системы уравненій, и каждая изъ нихъ приводитъ къ сопряженнымъ значеніямъ чиселъ $b$ и $b'$.

Второе уравненіе первой системы даетъ

$$b' = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1};$$

изобразивъ эти два корня чрезъ $b_1'$ и $b_2'$, будетъ

$$b_1' = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

$$b_2' = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}.$$

Для соотвѣтственныхъ величинъ $b$, которыя изобразимъ чрезъ $b_1$ и $b_2$, въ силу перваго уравненія, получимъ

$$b_1 = \frac{b_1' - \sqrt[4]{2}}{b_1'\sqrt[4]{2} - 1}, \quad b_2 = \frac{b_2' - \sqrt[4]{2}}{b_2'\sqrt[4]{2} - 1}.$$

Вторая система доставитъ

$$b' = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1};$$

изобразивъ эти два корня чрезъ $b_3'$ и $b_4'$, получимъ

$$b_3' = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = -b_2'$$

$$b_4' = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = -b_1',$$

а для сопряженныхъ значеній $b$, которыя означимъ чрезъ $b_3$ и $b_4$, найдется

$$b_3 = -\frac{b_3' + \sqrt[4]{2}}{b_3'\sqrt[4]{2} + 1} = \frac{-b_2' + \sqrt[4]{2}}{b_2'\sqrt[4]{2} - 1} = -b_2$$

$$b_4 = -\frac{b_4' + \sqrt[4]{2}}{b_4'\sqrt[4]{2} + 1} = \frac{-b_1' + \sqrt[4]{2}}{b_1'\sqrt[4]{2} - 1} = -b_1.$$

Такимъ образомъ мы приведены къ заключенію, что полученныя *четыре* дроби вида $\frac{x+b}{x+b'}$, именно

$$\frac{x+b_1}{x+b_1'}, \quad \frac{x-b_1}{x-b_1'}, \quad \frac{x+b_2}{x+b_2'} \quad \text{и} \quad \frac{x-b_2}{x-b_2'} \ldots\ldots (13)$$

хотя и не принадлежатъ къ числу *знакоперемѣнныхъ возвратныхъ*, но пользуются однакожъ тѣмъ свойствомъ, что интегралъ

$$\int \frac{x+b}{x+b'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

можетъ быть выраженъ помощію функцій алгебрическихъ и логариѳмическихъ или круговыхъ.

8. Напримѣръ, еслибъ предложено было опредѣлить интегралъ

$$\int X dx = \int \frac{x+b_1}{x+b_1'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}},$$

гдѣ, какъ мы сей-часъ видѣли,

$$b_1' = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}, \quad \text{а} \quad b_1 = \frac{b_1' - \sqrt[4]{2}}{b_1' \sqrt[4]{2} - 1},$$

то, удержавъ для сокращенія письма буквы $b_1$ и $b_1'$, получили бы

$$\int \frac{x + b_1}{x + b_1'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}} = Y + Z,$$

разумѣя подъ $Y$ интегралъ (12), или, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующій:

$$Y = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \cdot \frac{b_1 + b_1'}{b_1'} \int \frac{u + 1}{u - 1} \cdot \frac{\frac{dt}{u - \frac{1}{u}}}{\sqrt{t^2 - 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}},$$

въ которомъ имѣемъ

$$t = u + \frac{1}{u} = \frac{s}{\sqrt[4]{8}} + \frac{\sqrt[4]{8}}{s} = \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{\sqrt[4]{8}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^4 + 2(1 + \sqrt{2})x^2 + 1}{\sqrt[4]{8}(x^3 + x)}.$$

Что касается до интеграла $Z$, то онъ прямо выражается въ $x$-ахъ формулою (11), написавъ въ ней $b_1$ вмѣсто $b$ и $b_1'$ вмѣсто $b'$.

Если представимъ дробь $\frac{u+1}{u-1}$ въ видѣ

$$\frac{u+1}{u-1} = \frac{u - \frac{1}{u}}{\left(u + \frac{1}{u}\right) - 2} = \frac{u - \frac{1}{u}}{t - 2},$$

то получимъ

$$Y = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \cdot \frac{b_1 + b_1'}{b_1'} \int \frac{dt}{(t-2)\sqrt{t^2 - 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}},$$

и, по совершеніи интегрированія,

$$Y = C - \frac{\sqrt[4]{2}(b_1 + b_1')}{2b_1'\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{t - 2 - \sqrt{t^2 - 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2}}\right),$$

гдѣ $C$ означаетъ постоянную произвольную величину; перемѣнная же $t$ должна быть замѣнена въ этомъ выраженіи величиною

$$t = \frac{x^4 + 2(1+\sqrt{2})x^2 + 1}{\sqrt[4]{8}(x^3+x)}.$$

**9. Четыре случая интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала**

$$\frac{x+b}{x+b'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}},$$

**найденные въ N⁰ 7, приводятъ къ новымъ возможнымъ случаямъ интегрированія чрезъ совокупленіе дробей (13) посредствомъ сложенія и вычитанія.**

**Такимъ образомъ дробь, на которую помножается** $\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$, **можетъ быть, напримѣръ, одна изъ слѣдующихъ:**

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+b_1}{x+b_1'} + \frac{x-b_1}{x-b_1'}\right) = \frac{x^2 - b_1 b_1'}{x^2 - b_1'^2},$$

$$\frac{1}{2(b_1' - b_1)}\left(\frac{x+b_1}{x+b_1'} - \frac{x-b_1}{x-b_1'}\right) = \frac{x}{x^2 - b_1'^2},$$

$$\frac{x+b_2}{x+b_2'} - \frac{x-b_1}{x-b_1'} = \frac{(b_1+b_2-b_1'-b_2')x + b_1b_2' - b_2b_1'}{(x+b_2')(x-b_1')}.$$

**Сверхъ того, можно воспользоваться различіемъ корней** $\alpha$ **и** $\beta$, **опредѣляемыхъ уравненіями (5) и (6) для полученія другихъ системъ величинъ** $b$ **и** $b'$. **Такъ въ разсмотрѣнномъ нами интегралѣ (N⁰ 7)**

$$Y = \int \frac{(b+b')z + 2(1+bb')}{2b'z + 2(1+b'^2)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z^2-4)(z^2-2)}}$$

**мы могли бы обратить полиномъ**

$$(z^2-4)(z^2-2) = z^4 - 6z^2 + 8$$

**въ *возвратный* не только положивъ** $z = \sqrt[4]{8}.u$, **какъ это было сдѣлано, но и принявъ за коэффиціентъ** $u$ **одинъ изъ мнимыхъ корней 4-ой степени числа 8, напримѣръ употребивъ преобразованіе**

$$z = \sqrt[4]{8}.\sqrt{-1}.u.$$

Такое предположеніе доставило бы для опредѣленія величинъ $b$ и $b'$ слѣдующія двѣ системы уравненій:

$$2(1+bb') = \pm(b+b')\sqrt[4]{8}.\sqrt{-1}$$

$$1+b'^2 = \mp b'\sqrt[4]{8}.\sqrt{-1},$$

приводящія къ значеніямъ $b$ и $b'$ очевидно отличнымъ отъ полученныхъ въ N° 7.

Независимо отъ исчисленныхъ уже системъ величинъ для $b$ и $b'$, пріёмъ, объясненный въ N° 6, приведетъ еще къ множеству другихъ. Чтобы показать это на самомъ дѣлѣ, обратимся опять къ формулѣ (12). Если бы въ ней подъинтегральная дробь не обращалась въ $\frac{u\pm 1}{u\mp 1}$, какъ мы допустили въ N° 7, то положивъ для краткости

$$\frac{2(1+bb')}{(b+b')\sqrt[4]{8}} = B, \quad \frac{1+b'^2}{b'\sqrt[4]{8}} = B' \ldots\ldots\ldots (14)$$

и замѣнивъ отношеніе $\frac{1}{u-\frac{1}{u}}$ отношеніемъ $\frac{1}{\sqrt{t^2-4}}$, получили бы

$$Y = \frac{\sqrt[4]{2}}{4}\cdot\frac{b+b'}{b'}\int\frac{u+B}{u+B'}\cdot\frac{dt}{\sqrt{(t^2-4)(t^2-2-\frac{3}{2}\sqrt{2})}}.$$

Такъ какъ преобразованіе

$$t = \sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}.v$$

приводитъ полиномъ

$$(t^4-4)(t^2-2-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}) = t^4-(6+\tfrac{3}{2}\sqrt{2})t^2+8+6\sqrt{2}$$

къ виду *возвратнаго*, то и найдется

$$Y = \mu\int\frac{v+\frac{B}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}}}{v+\frac{B'}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}}}\cdot\frac{dv}{v\sqrt{v^2+\frac{1}{v^2}-\frac{6+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8+6\sqrt{2}}}}},$$

принявъ для сокращенія

$$\mu = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \cdot \frac{b+b'}{b'} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}}.$$

Наконецъ, положивъ

$$v + \frac{1}{v} = w,$$

получимъ

$$Y = \mu \int \frac{v + \dfrac{B}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}}}{v + \dfrac{B'}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}}} \cdot \frac{\dfrac{dw}{v - \dfrac{1}{v}}}{\sqrt{w^2 - 2 - \dfrac{6+\frac{3}{4}\sqrt{2}}{\sqrt{8+6\sqrt{2}}}}}.$$

Такимъ образомъ мы опять приведены къ интегралу, выразимому въ конечномъ видѣ, когда подъинтегральная дробь будетъ *знакоперемѣнною возвратною*, а для этого требуется, чтобы было

$$B = \sqrt[4]{8+6\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad B' = -\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}},$$

или

$$B = -\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad B' = \sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}.$$

Внося эти величины въ уравн. (14), получимъ новыя системы для $b$ и $b'$.

Далѣе, если бы подъинтегральная дробь въ предъидущемъ выраженіи для $Y$ не была вида $\frac{v \pm 1}{v \mp 1}$, то принявъ для простоты

$$\frac{B}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}} = B_1, \quad \frac{B'}{\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}} = B_1' \ldots\ldots\ldots (15)$$

и разложивъ потомъ дробь

$$\frac{v + B_1}{v + B_1'}$$

на двѣ другія, одну *возвратную*, а другую *знакоперемѣнную возвратную* (№ 2) относительно перемѣнной $w = v + \frac{1}{v}$, получили бы

$$\frac{v + B_1}{v + B_1'} = \frac{w + 2B_1 + \sqrt{w^2 - 4}}{w + 2B_1' + \sqrt{w^2 - 4}} =$$

$$\frac{(B_1 + B_1')w + 2(1 + B_1B_1')}{2B_1'w + 2(1 + B_1'^2)} + \frac{(B_1' - B_1)\sqrt{w^2 - 4}}{2B_1w + 2(1 + B_1'^2)},$$

въ слѣдствіе чего

$$Y = \mu \int \frac{(B_1 + B_1')w + 2(1 + B_1B_1')}{2B_1'w + 2(1 + B_1'^2)} \cdot \frac{dw}{\sqrt{(w^2 - 4)\left(w^2 - 2 - \frac{6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}\right)}}$$

$$+ \mu \cdot \frac{B_1' - B_1}{2B_1'} \int \frac{1}{w + \frac{1 + B_1'}{2B_1'}} \cdot \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 2 - \frac{6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}}}.$$

Послѣдній интегралъ найдется по извѣстнымъ правиламъ. Что же касается до перваго, то обращаемъ полиномъ

$$(w^2 - 4)\left(w^2 - 2 - \frac{6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}\right) = w^4 - \left(6 + \frac{6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}\right)w^2 + 4\left(2 + \frac{6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}\right)$$

въ *возвратный* посредствомъ преобразованія

$$w = \sqrt[4]{8 + \frac{24 + 6\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}} \cdot y;$$

потомъ, подобно предъидущему, окажется, что упоминаемый интегралъ опредѣлится въ конечномъ видѣ при слѣдующихъ двухъ предположеніяхъ:

$$2(1 + B_1B_1') = (B_1 + B_1')\sqrt[4]{8 + \frac{24 + 6\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}}$$

и

$$1 + B_1'^2 = -B_1'\sqrt[4]{8 + \frac{24 + 6\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}},$$

а также

$$2(1 + B_1B_1') = -(B_1 + B_1')\sqrt[4]{8 + \frac{24 + 6\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}}$$

и

$$1 + B_1'^2 = B_1'\sqrt[4]{8 + \frac{24 + 6\sqrt{2}}{\sqrt{8 + 6\sqrt{2}}}}.$$

Изъ этихъ двухъ системъ уравненій опредѣляются $B_1'$ и $B_1$, а на основаніи формулъ (15) и (14) получимъ равенства

$$B_1 = \frac{2(1+bb')}{(b+b')\sqrt[4]{8}.\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}},$$

$$B_1' = \frac{1+b'^2}{b'\sqrt[4]{8}.\sqrt[4]{8+6\sqrt{2}}},$$

изъ которыхъ выведемъ опять новыя системы сопряженныхъ численныхъ значеній для $b$ и $b'$. Число системъ, которыя получатся такимъ образомъ чрезъ дальнѣйшее повтореніе употребленнаго сей-часъ пріёма, вообще неограниченно, при чёмъ самый составъ чиселъ $b$ и $b'$ будетъ становиться всё болѣе и болѣе сложнымъ. И такъ, основываясь на преобразованіи, предложенномъ въ N$^0$ 3, а также на слѣдующихъ за тѣмъ соображеніяхъ, мы окончательно въ правѣ заключить, что вообще существуетъ безконечное число случаевъ, или системъ значеній для $C_1$ и $C_2$, при которыхъ интегралъ

$$\int \frac{x+C_1}{x+C_2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

можетъ быть выраженъ помощію функцій алгебрическихъ и логариѳмическихъ или круговыхъ.

10. Подвергая выраженіе

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

дѣйствіямъ, подобнымъ вышеизложеннымъ, найдутся разные случаи интегрируемости этого дифференціала въ конечномъ видѣ; всѣ они будутъ отличаться отъ случаевъ, исчисленныхъ въ N$^0$ 4; тамъ, дѣйствуя надъ выраженіемъ

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Ax+1}}$$

съ приготовленнымъ подкореннымъ полиномомъ, мы нашли для дроби

$$\frac{x^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

*четыре знакоперемѣнныхъ возвратныхъ вида*, между тѣмъ какъ при употребленіи пріёма, объясненнаго въ N° 6, получатся дроби, не подчиненныя этому условію.

Не останавливаясь на разъисканіи различныхъ системъ значеній коэффиціентовъ $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, при которыхъ послѣдній дифференціалъ допускаетъ точное интегрированіе, ограничимся разсмотрѣніемъ одного частнаго вида дроби. Пусть будетъ, напримѣръ, дифференціалъ

$$\frac{x^2+c}{x^2+c'}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^2+1}}=\frac{x^2+c}{x^2+c'}\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+A}}$$

съ приготовленнымъ подкореннымъ полиномомъ. Изъ сказаннаго въ N° 4 слѣдуетъ, что дробь $\frac{x^2+c}{x^2+c'}$ будетъ *знакоперемѣнною возвратною* только при двухъ предположеніяхъ, именно при $c=+1$, $c'=-1$ и при $c=-1$, $c'=+1$. Посмотримъ теперь, какъ найти другія системы сопряженныхъ значеній для $c$ и $c'$, при которыхъ интегралъ разсматриваемаго нами дифференціала выражался бы въ конечномъ видѣ. Для этого, поступая точно такъ какъ объяснено въ NN° 6 и 7, полагаемъ

$$x+\frac{1}{x}=z,$$

откуда

$$x=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{z^2-4},\quad \frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{z^2-4}},$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+A=z^2+A-2,$$

$$\frac{x^2+c}{x^2+c'}=\frac{(c+c')z^2+2(c-1)(c'-1)}{2c'z^2+2(c'-1)^2}+\frac{(c'-c)z\sqrt{z^2-4}}{2c'z^2+2(c'-1)^2}.$$

Слѣдовательно

$$\int\frac{x^2+c}{x^2+c'}\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+A}}=$$

$$\int\frac{(c+c')z^2+2(c-1)(c'-1)}{2c'z^2+2(c'-1)^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(z^2-4)(z^2+A-2)}}$$

$$+\frac{c'-c}{2c'}\int\frac{z}{z^2+\frac{(c'-1)^2}{c'}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{z^2+A-2}}.$$

Послѣдній интегралъ опредѣляется непосредственно. Что̀ касается до предпослѣдняго, который изобразимъ чрезъ $Y$, то приведя подкоренной полиномъ къ *возвратному* виду помощію преобразованія

$$z = \sqrt[4]{8-4A}\,.\,u,$$

получимъ

$$Y = \frac{c+c'}{4c'\sqrt[4]{8-4A}} \int \frac{u^2 + \dfrac{(c-1)(c'-1)}{(c+c')\sqrt{2-A}}}{u^2 + \dfrac{(c'-1)^2}{2c'\sqrt{2-A}}} \cdot \frac{du}{u\sqrt{u^2 + \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{A-6}{8-4A}}}.$$

Но этотъ интегралъ возможенъ въ конечномъ видѣ, когда подъинтегральная дробь будетъ *знакоперемѣнною возвратною*. А для этого должно быть или

$$(c-1)(c'-1) = (c+c')\sqrt{2-A} \text{ и } (c'-1)^2 = -2c'\sqrt{2-A},$$

или

$$(c-1)(c'-1) = -(c+c')\sqrt{2-A} \text{ и } (c'-1)^2 = 2c'\sqrt{2-A}.$$

Первая система доставитъ

$$c' = 1 - \sqrt{2-A} \pm \sqrt{2-A-2\sqrt{2-A}}$$

и
$$c = \frac{(1+\sqrt{2-A})\,c'-1}{c'-(1+\sqrt{2-A})},$$

а вторая

$$c' = 1 + \sqrt{2-A} \pm \sqrt{2-A+2\sqrt{2-A}}$$

и
$$c = \frac{(1-\sqrt{2-A})\,c'-1}{c'-(1-\sqrt{2-A})}.$$

Такимъ образомъ мы приведены къ системамъ сопряженныхъ значеній для $c$ и $c'$, отличнымъ отъ двухъ первоначальныхъ $c = \pm 1$ и $c' = \mp 1$ (№ 4). Отъ этихъ новыхъ величинъ

$c$ и $c'$ можно опять, тѣмъ же путемъ, перейти къ другимъ, и продолжать такое дѣйствіе неопредѣленно.

Соображенія и пріёмы, изложенныя въ предъидущихъ NN°, очевидно примѣнимы къ интегралу общаго вида

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}},$$

разумѣя подъ $\frac{f(x)}{F(x)}$ какую ни есть раціональную дробь. Но ежели бы степень подкореннаго полинома превышала *четвертую*, то представились бы особенныя затрудненія, для устраненія которыхъ предложенный въ этой статьѣ анализъ оказался-бы недостаточнымъ.

Въ заключеніе напомнимъ, что нѣкоторые случаи интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала

$$\frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1}}$$

съ возвратнымъ подкореннымъ полиномомъ представлялись и прежде. Но, сколько мнѣ извѣстно, они никѣмъ не были подведены подъ особенныя правила, и бо́льшею частію относились къ предположенію, что дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ представлялась въ видѣ, названнымъ нами *знакоперемѣннымъ возвратнымъ*. Такъ, между прочимъ, Эйлеръ, въ *Inst. Calc. Integr.* (1776 г. Т. IV, стр. 36) разсматривалъ интегралъ

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} = \int \frac{1+x^4}{1-x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}},$$

въ которомъ подъинтегральная дробь есть *знакоперемѣнная возвратная* функція, какъ то̀ прямо видно изъ тождества

$$\frac{1+x^4}{1-x^4} + \frac{1+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^4}} = 0.$$

Эйлеръ, для приведенія подъинтегральнаго выраженія къ раціональному виду, предложилъ два преобразованія, именно

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{2}}$$

и другое

$$\sqrt{1+x^4} = px.$$